

احتمال مهندسی

فصل اول: اصول شمارش

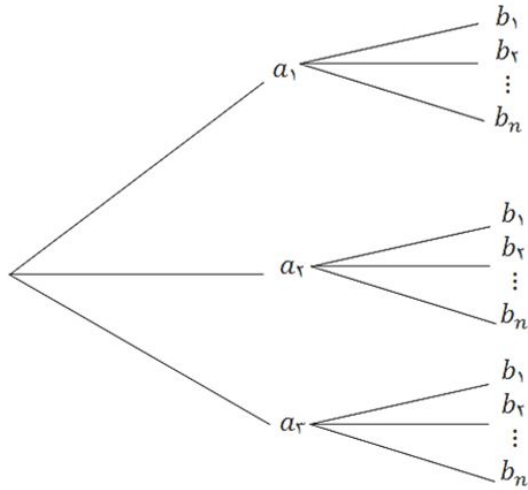
سید مهدی سجادیه



اصل شمارش

- اصل و:

– اگر دو عمل که اولی به m حالت و دومی به n حالت قابل انجام باشند را بخواهیم با هم انجام دهیم این عمل به $m \cdot n$ حالت قابل انجام است.



- **مثال:** جامعه ای شامل ۱۰ خانواده است که هر خانواده دو فرزند دارد.

- الف) اگر بخواهیم از این جامعه یک مادر و یکی از فرزندان را انتخاب کنیم چند حالت وجود دارد؟ $20 = 2 * 10$

- ب) اگر بخواهیم از این جامعه یک مادر و یک کودک انتخاب کنیم چند حالت وجود دارد؟

- $200 = 20 * 10$

اصل جمع

- اصل یا:

– اگر عملی را بتوانیم به دو روش اجرا کنیم به طوریکه که روش اولی به m حالت و روش دوم به n حالت قابل انجام باشند این عمل به $m+n$ حالت قابل انجام است.

- **مثال:** فرض کنید می خواهید یک ماشین تهیه کنید. در صورتیکه دو نمایشگاه وجود داشته باشد و در نمایشگاه اول ۴ ماشین و در نمایشگاه دوم ۳ ماشین وجود داشته باشد

- الف) به چند طریق از این دو نمایشگاه می توانید یک ماشین تهیه کنید؟

$$7 = 4 + 3$$

- ب) اگر بخواهیم از نمایشگاه اول یک ماشین و از نمایشگاه دوم نیز یک ماشین تهیه کنیم چند حالت وجود دارد؟

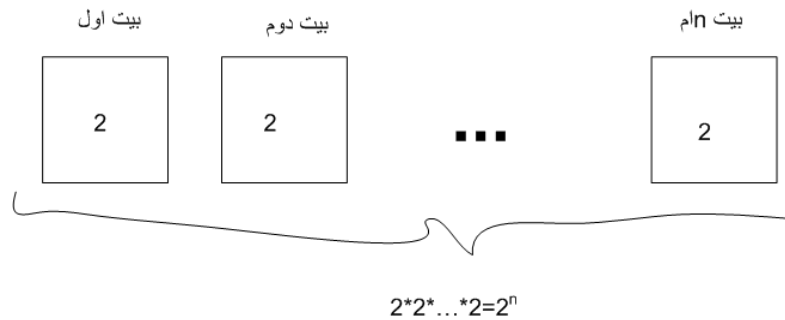
$$12 = 4 * 3$$

تعمیم اصل شمارش

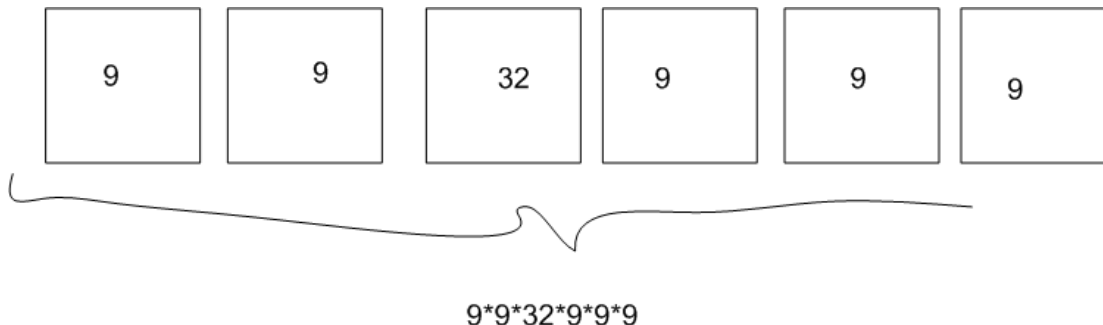
- **تعمیم اصل و:**

– اگر k عمل که اولی به m_1 حالت، دومی به m_2 حالت، ... و k امی به m_k حالت قابل انجام باشند را بخواهیم با هم انجام دهیم این عمل به $m_1 * m_2 * \dots * m_k$ حالت قابل انجام است.

- **مثال:** چند عدد n رقمی می توان نوشت که ارقام آن فقط صفر یا یک باشد (اگر سمت راست یک n بیتی صفر باشد آن صفرها حذف نمی شود)؟



- **مثال:** چند پلاک اتومبیل با یک حرف الفبا و ۵ رقم با ارقام غیر صفر می توان نوشت؟



جایگشت

- اگر r عضو وجود داشته باشد (عضو مجزا) و ترتیب قرار گرفتن آنه برای ما مهم باشد گوییم جایگشت r تایی داریم.
- تعداد جایگشت‌های r تایی برابر است با:
 $r! = r * (r-1) * (r-2) * \dots * 2 * 1$

- **مثال:** فرض کنید در یک کلاس ۶ دانشجوی پسر و ۴ دانشجوی دختر حضور دارند. پس از برگزاری امتحان نمرات آنه به چند صورت قابل نمایش است اگر
- الف) محدودیتی در لیست نباشد؟

10!

- ب) لیست دخترها و پسرها جدا باشد؟
- **6!*4!**

ترتیب

- فرض کنید n عضو داریم و می خواهیم k تا از آنها را انتخاب کنیم ($k \leq n$) به طوریکه ترتیب اعضا برای ما مهم باشد. به چند طریق اینکار قابل انجام است؟

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \dots (n - k + 1) = n! / (n - k)!$$

- **مثال:** فرض کنید چهار عضو a, b, c, d وجود دارند. چند ترتیب برای انتخاب دو عضو از این مجموعه وجود دارد.

ab ac ad ba bc bd
ca cb cd da db dc

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

جایگشت با ویژگی های خاص

- اگر یک مجموعه n تایی داشته باشیم که k_1 عضو آن یک شکل، k_2 عضو آن شکل دیگر و ... k_r تای آن شکل مجزا از $r-1$ شکل قبل باشند در این صورت تعداد جایگشتها برابر است با:

$$n!$$

$$(k_1!)(k_2!) \dots (k_r!)$$

- **مثال:** با حروف کلمه PERRER چند کلمه دیگر شش حرفی می توان ساخت؟

$$\frac{6!}{(3!)(2!)(1!)} = 60$$

- **مثال:** با حروف کلمه مامان چند کلمه ۵ حرفی غیر تکراری می توان ساخت؟

$$\frac{5!}{(2!)(2!)(1!)} = 15$$

ترکیب

- اگر در انتخاب r شی از n شی، ترتیب اشیا مهم نباشد گوئیم ترکیب رخ داده است:

$$\frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

ترکیب

- اگر در انتخاب r شی از n شی، ترتیب اشیا مهم نباشد گوئیم ترکیب رخ داده است:

$$\frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

- چندویژگی مهم

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \binom{n}{n-r} = \binom{n}{r}$$

$$\binom{n}{r} = 0, r > n$$

مثال

- ۷ مرد و ۵ زن کاندید شورای شهر در یک شهر هستند و این شهر نیاز به عضو دارد.
- (الف) به چند طریق می توان از بین این کاندیداها ۵ عضو انتخاب کرد.

- (ب) اگر بخواهیم از بین اعضا ۳ نفر زن و دو نفر مرد باشند به چند طریق این کار قابل انجام است؟
-

مثال

- ۷ مرد و ۵ زن کاندید شورای شهر در یک شهر هستند و این شهر نیاز به عضو دارد.

- الف) به چند طریق می توان از بین این کاندیداها ۵ عضو انتخاب کرد.

$$\binom{12}{5} = \frac{12!}{(7)!5!} = \frac{12 * 11 * 10 * 9 * 8}{5 * 4 * 3 * 2 * 1}$$

- ب) اگر بخواهیم از بین اعضا ۳ نفر زن و دو نفر مرد باشند به چند طریق این کار قابل انجام است؟

مثال

- ۷ مرد و ۵ زن کاندید شورای شهر در یک شهر هستند و این شهر نیاز به عضو دارد.
- (الف) به چند طریق می توان از بین این کاندیداها ۵ عضو انتخاب کرد.

$$\binom{12}{5} = \frac{12!}{(7)!5!} = \frac{12 * 11 * 10 * 9 * 8}{5 * 4 * 3 * 2 * 1}$$

- (ب) اگر بخواهیم از بین اعضا ۳ نفر زن و دو نفر مرد باشند به چند طریق این کار قابل انجام است؟
-

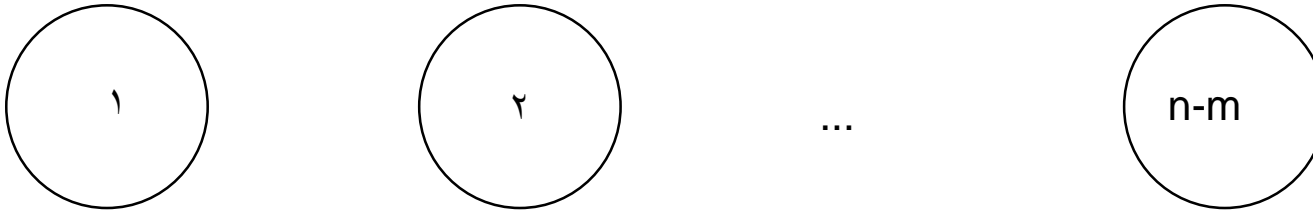
$$\binom{5}{3} * \binom{7}{2} = \frac{5!}{(3)!2!} * \frac{7!}{(5)!2!} = 10 * 21 = 210$$

مثال

- فرض کنید مجموعه ای از n آنتن وجود دارد که m تای آنها معیوب و بقیه سالم هستند و آنتن سالم و معیوب از لحاظ ظاهری قابل شناسایی نیستند. چند حالت وجود دارد که در چیدمان n آنتن هیچ دو آنتن معیوب پشت سرهم قرار نگیرند؟ **دقت کنید آنتن ها از هم قابل تشخیص نیستند**
- حل:

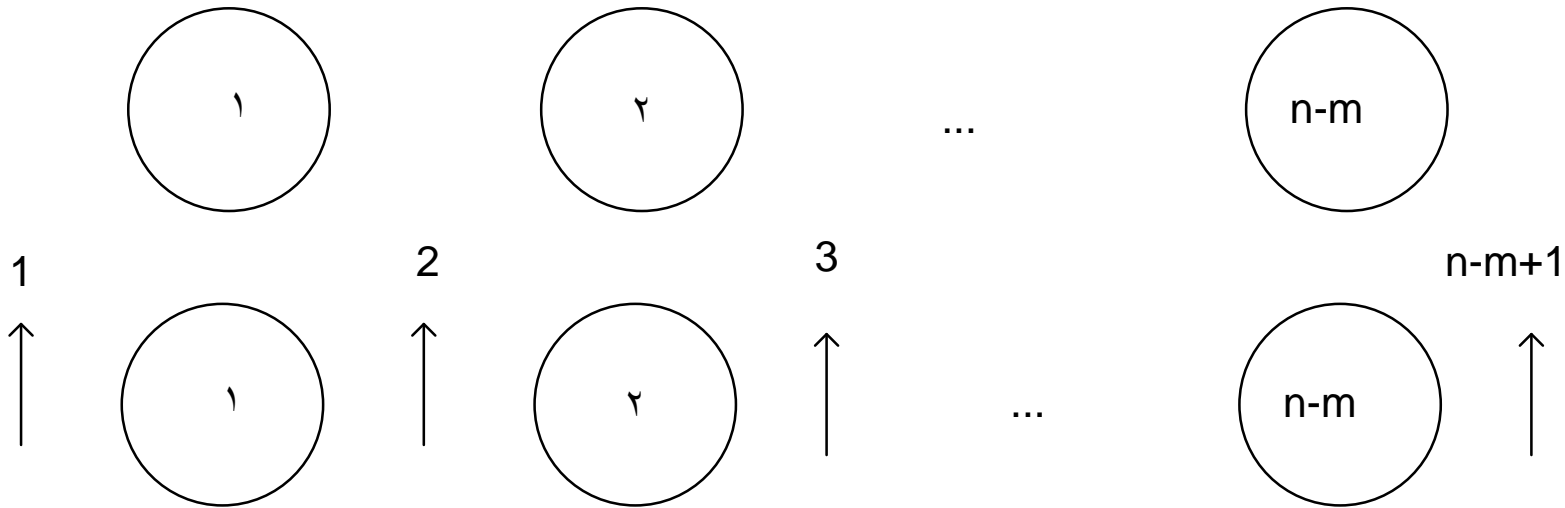
مثال

- فرض کنید مجموعه ای از n آنتن وجود دارد که m تای آنها معیوب و بقیه سالم هستند و آنتن سالم و معیوب از لحاظ ظاهری قابل شناسایی نیستند. چند حالت وجود دارد که در چیدمان n آنتن هیچ دو آنتن معیوب پشت سرهم قرار نگیرند؟ دقت کنید آنتن ها از هم قابل تشخیص نیستند
- حل: آنتن های سالم را در نظر بگیرید



مثال

- فرض کنید مجموعه ای از n آنتن وجود دارد که m تای آنها معیوب و بقیه سالم هستند و آنتن سالم و معیوب از لحاظ ظاهری قابل شناسایی نیستند. چند حالت وجود دارد که در چیدمان n آنتن هیچ دو آنتن معیوب پشت سر هم قرار نگیرند؟ دقت کنید آنتن ها از هم قابل تشخیص نیستند
- حل: آنتن های سالم را در نظر بگیرید



- آنتهای معیوب میتوانند فقط در نقاط مشخص شده قرار گیرند
تا هیچ دو آنتن معیوب پشت سر هم نباشند

مثال

- فرض کنید مجموعه ای از 5 آنتن وجود دارد که 2 تای آنها معیوب و بقیه سالم هستند و آنتن سالم و معیوب از لحاظ ظاهری قابل شناسایی نیستند. چند حالت وجود دارد که در چیدمان 5 آنتن هیچ دو آنتن معیوب پشت سرهم قرار نگیرند؟

• حل

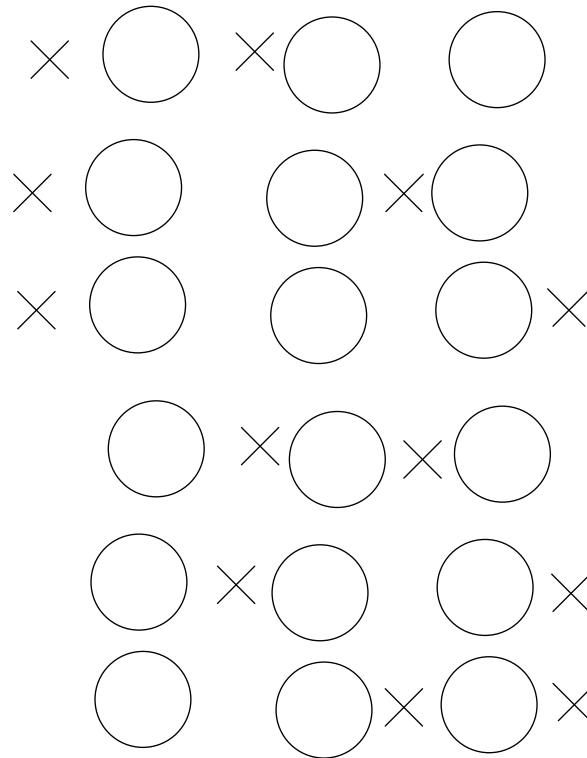
$$\binom{5-2+1}{2} = 6$$

مثال

- فرض کنید مجموعه ای از 5 آنتن وجود دارد که 2 تای آنها معیوب و بقیه سالم هستند و آنتن سالم و معیوب از لحاظ ظاهری قابل شناسایی نیستند. چند حالت وجود دارد که در چیدمان 5 آنتن هیچ دو آنتن معیوب پشت سرهم قرار نگیرند؟

• حل

$$\binom{5-2+1}{2} = 6$$



$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

رابطه مهم در ترکیبیات

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

- اثبات: با استفاده از یک عنصر (تبدیل n عنصر به دو مجموعه یک عضو و $n-1$ عضو)

$$\binom{n-1}{r-1}$$

- دو حالت
- حضور یک عضو مورد نظر در r تایی انتخاب شده

$$\binom{n-1}{r}$$

- عدم حضور یک عضو مورد نظر در r تایی انتخاب شده

قضیه دو جمله ای

$$\begin{aligned}(x + y)^3 &= (x + y)(x + y)(x + y) = \\ x^3 + x^2y + xyx + xy^2 + yxx + yxy + yyx + yyy &= \\ x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 &\end{aligned}$$

قضیه دو جمله ای

$$(x + y)^n = \underbrace{(x + y)(x + y)\dots(x + y)}_n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

- اثبات:
- توان i متغیر x باید از n پرانتز، i تای آن انتخاب شود

تقسیم n نفر به r گروه مجزا

- فرض کنید n نفر را بخواهیم بین r گروه تقسیم کنیم به طوری که اعضای هر گروه به ترتیب گروه‌های n_1, n_2, \dots, n_r باشد در این صورت تعداد حالات برابر است با:

$$\binom{n}{n_1} \binom{n-n_1}{n_2} \binom{n-n_1-n_2}{n_3} \dots \binom{n-n_1-n_2-\dots-n_{r-1}}{n_r} =$$
$$\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!} \dots \frac{(n-n_1-n_2-\dots-n_{r-1})!}{n_r!(n-n_1-n_2-\dots-n_{r-1}-n_r)!} =$$
$$\frac{n!}{n_1!(n_2)! \dots n_r!}$$

مثال

- فرض کنید ۱۰ پلیس در یک کلانتری استخدام شده اند. اگر ۳ نفر در قسمت اداری، ۵ نفر در قسمت گشت و ۲ نفر در قسمت ورودی کار کنند به چند طریق این کار قابل انجام است؟

مثال

- فرض کنید ۱۰ پلیس در یک کلانتری استخدام شده اند. اگر ۳ نفر در قسمت اداری، ۵ نفر در قسمت گشت و ۲ نفر در قسمت ورودی کار کنند به چند طریق این کار قابل انجام است؟

$$\binom{n}{n_1, n_2, n_3} = \binom{10}{2, 5, 3} = \frac{10!}{2! 5! 3!}$$

تعداد جوابهای مثبت صحیح معادلات

- اگر بخواهیم Ω توپ مختلف را در r ظرف مجزا قرار دهیم به چند طریق اینکار قابل انجام است؟

$$\underbrace{n * n * \dots * n}_r = n^r$$

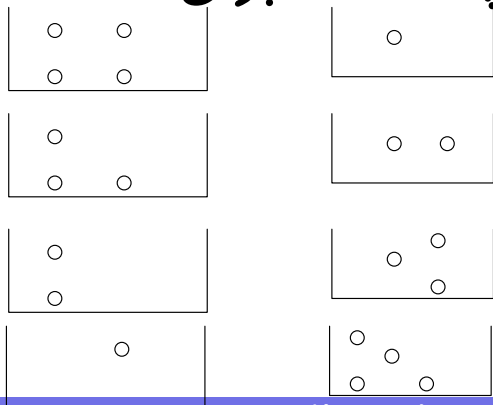
تعداد جوابهای مثبت صحیح معادلات

- اگر بخواهیم n توپ مختلف را در r ظرف مجزا قرار دهیم به چند طریق اینکار قابل انجام است؟

$$\underbrace{n * n * \dots * n}_r = n^r$$

- حال اگر این توپها مانند هم باشد و در هر ظرف باید حداقل یک توپ باشد چه اتفاقی می افتد؟

- مثال : فرض کنید دو ظرف مجزاداریم و ۵ توپ مثل هم. چند حالت برای تقسیم توپها بین دو ظرف وجود دارد؟



تعداد جوابهای مثبت صحیح معادلات

- برای آنکه تعداد حالات ممکن برای تقسیم n توپ یکسان بین r ظرف تقسیم کنیم به شرط آنکه حداقل در هر ظرف یک توپ باشد باید $r-1$ جدا کننده بین $n-1$ مکان بین توپها قرار دهیم و بنابراین تعداد حالات برابر است با:

$$\binom{n-1}{r-1}$$

- این مساله معادل آن است تعداد جوابهای مثبت معادله زیر محاسبه شود:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_r = n, \quad x_i \geq 1$$

تعداد جوابهای مثبت صحیح معادلات

- مثال: اگر شخصی دارای ۲۰ دلار است و می خواهد در چهار زمینه سرمایه گذاری کند. به چند روش می تواند در این چهار زمینه سرمایه گذاری کند به طوریکه در هر زمینه حداقل یک دلار سرمایه گذاری کرده باشد؟
- اگر بخواهد علاوه بر سرمایه گذاری مقداری پول (حداقل یک دلار) نزد خود نگه دارد به چند حالت این کار امکان پذیر است؟

تعداد جوابهای مثبت صحیح معادلات

- مثال: اگر شخصی دارای ۲۰ دلار است و می خواهد در چهار زمینه سرمایه گذاری کند. به چند روش می تواند در این چهار زمینه سرمایه گذاری کند به طوری که در هر زمینه حداقل یک دلار سرمایه گذاری کرده باشد؟
- حل: x_i میزان سرمایه گذاری در زمینه i ام

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20 \quad x_i \geq 1$$

$$\Rightarrow \binom{20-1}{4-1} = \frac{19*18*17}{6} = 969$$

- اگر بخواهد علاوه بر سرمایه گذاری مقداری پول (حداقل یک دلار) نزد خود نگه دارد به چند حالت این کار امکان پذیر است؟

- حل: y میزان پول ذخیره شده $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y = 20 \quad x_i \geq 1, y \geq 1$

$$\Rightarrow \binom{20-1}{5-1} = \frac{19*18*17*16}{24} = 3876$$

تعداد جوابهای نامنفی صحیح معادلات

• اگر شرط $x_i \geq 0$ باشد حل به چه صورتی است؟

$$x_1 + x_2 + \dots + x_r = n \quad x_i \geq 0$$

• با تغییر متغیر داریم

$$y_i = x_i + 1 \Rightarrow y_i \geq 1, x_i = y_i - 1$$

تعداد جوابهای نامنفی صحیح معادلات

- اگر شرط $x_i \geq 0$ باشد حل به چه صورتی است؟

$$x_1 + x_2 + \dots + x_r = n \quad x_i \geq 0$$

- با تغییر متغیر داریم

$$y_i = x_i + 1 \Rightarrow y_i \geq 1, x_i = y_i - 1$$

- و در نتیجه:

$$(y_1 - 1) + (y_2 - 1) + \dots + (y_r - 1) = n \quad y_i \geq 1$$

$$y_1 + y_2 + \dots + y_r - r = n \quad y_i \geq 1$$

$$y_1 + y_2 + \dots + y_r = n + r \quad y_i \geq 1$$

- تعداد جوابهای نامنفی

$$\binom{n+r-1}{r-1}$$

مثال

- مثال: اگر شخصی دارای ۲۰ دلار است و می خواهد در چهار زمینه سرمایه گذاری کند. به چند روش می تواند در این چهار زمینه سرمایه گذاری کند به طوریکه می تواند در برخی زمینه ها سرمایه گذاری نکند؟

مثال

- مثال: اگر شخصی دارای ۲۰ دلار است و می خواهد در چهار زمینه سرمایه گذاری کند. به چند روش می تواند در این چهار زمینه سرمایه گذاری کند به طوریکه می تواند در برخی زمینه ها سرمایه گذاری نکند؟

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20 \quad x_i \geq 0$$

$$\Rightarrow \binom{20 + 4 - 1}{4 - 1} = \frac{23 * 22 * 21}{6} = 1771$$

- مثال به چند طریق می توان ۱۰ تخته سیاه را بین ۴ مدرسه تقسیم کرد به طوریکه به هر مدرسه حداقل یک تخته سیاه برسد؟

مثال

- مثال: اگر شخصی دارای ۲۰ دلار است و می خواهد در چهار زمینه سرمایه گذاری کند. به چند روش می تواند در این چهار زمینه سرمایه گذاری کند به طوری که می تواند در برخی زمینه ها سرمایه گذاری نکند؟

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20 \quad x_i \geq 0$$

$$\Rightarrow \binom{20+4-1}{4-1} = \frac{23*22*21}{6} = 1771$$

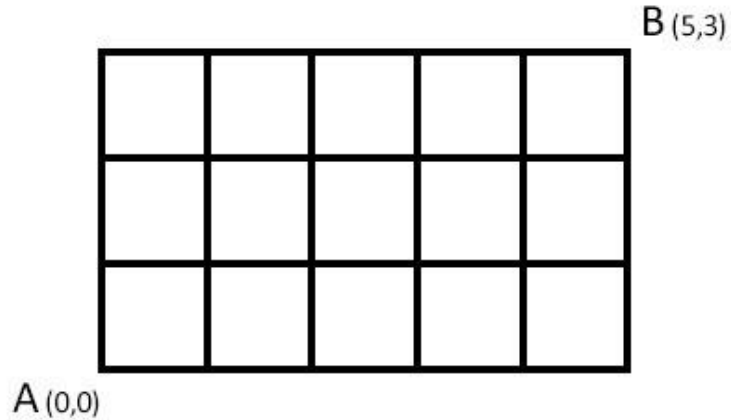
- مثال به چند طریق می توان ۱۰ تخته سیاه را بین ۴ مدرسه تقسیم کرد به طوری که به هر مدرسه حداقل یک تخته سیاه برسد؟

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \quad x_i \geq 1$$

$$\Rightarrow \binom{10-1}{4-1} = \binom{9}{3}$$

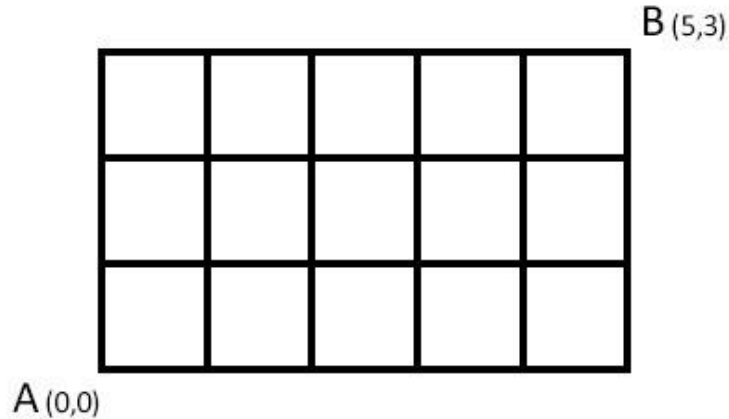
مثال

- مجموعه ای از نقاط را در نظر بگیرید که A می تواند تنها به سمت بالا و سمت راست حرکت کند. چند مسیر وجود دارد که A بتواند به B برسد؟



مثال

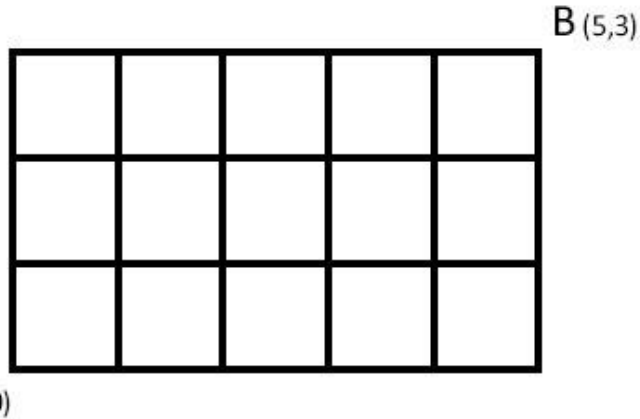
- مجموعه ای از نقاط را در نظر بگیرید که A می تواند تنها به سمت بالا و سمت راست حرکت کند. چند مسیر وجود دارد که A بتواند به B برسد؟



- راه حل اول: به چند روش می توان با $RRRRRHHH$ کلمات مختلف به دست آورد

مثال

- مجموعه ای از نقاط را در نظر بگیرید که A می تواند تنها به سمت بالا و سمت راست حرکت کند. چند مسیر وجود دارد که A بتواند به B برسد؟



- راه حل اول: به چند روش می توان با $RRRRRHHH$ کلمات مختلف به دست آورد

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \quad x_i \geq 0$$

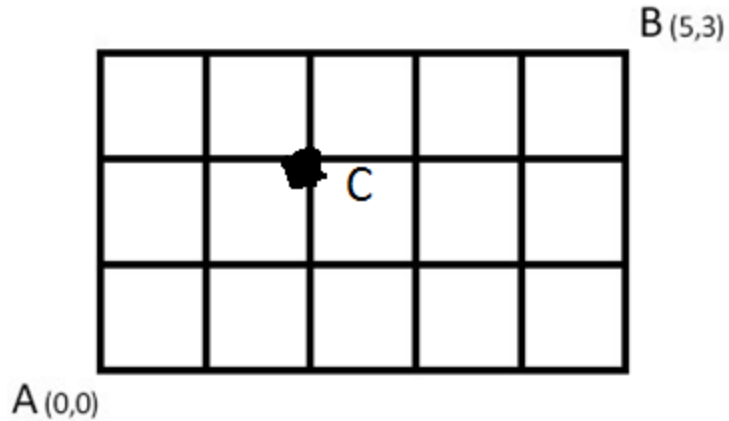
- راه حل دوم: $x_1 H x_2 H x_3 H x_4$

$$\Rightarrow \binom{5+4-1}{4-1} = \binom{8}{3}$$

- راه حل سوم $y_1 R y_2 R y_3 R y_4 R y_5 R y_6$

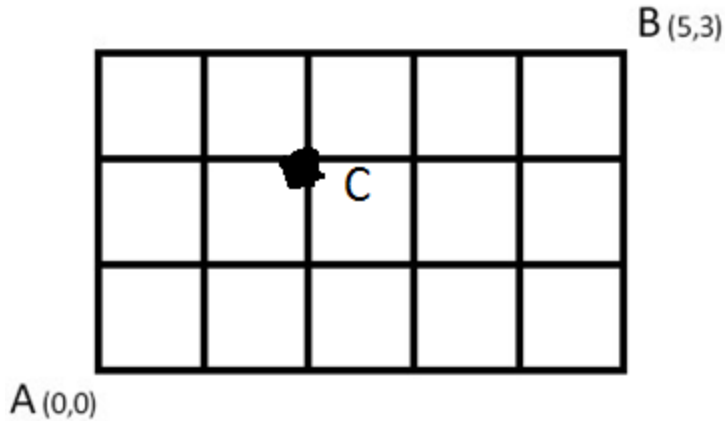
مثال

- مجموعه ای از نقاط را در نظر بگیرید که A می تواند تنها به سمت بالا و سمت راست حرکت کند. چند مسیر وجود دارد که A بتواند به B برسد و از C بگذرد؟



مثال

- مجموعه ای از نقاط را در نظر بگیرید که A می تواند تنها به سمت بالا و سمت راست حرکت کند. چند مسیر وجود دارد که A بتواند به B برسد و از C بگذرد؟



حل:

- چند مسیر از A به C وجود دارد؟
- چند مسیر از C به B وجود دارد؟

$$\binom{4}{2} \binom{4}{3} = 24$$

سپاس

